Seri bahan kuliah Algeo #15

Ruang Vektor Umum
(bagian 2)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Sumber:

Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Basis

- Jika V adalah ruang vektor dan S = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_n}$} adalah himpunan vektor-vektor di ruang vektor V, maka S dinamakan **basis** untuk V jika:

  (a) S bebas linier

  (b) S membangun V

- Jika S = {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_n}$} adalah basis untuk ruang vektor V, maka setiap vektor **v** di V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + ... + c_n\mathbf{v_n}$$

tepat dengan satu cara

Contoh 11: Vektor-vektor satuan standard **i** = (1, 0, 0), **j** = (0, 1, 0), dan **k** = (0, 0, 1) adalah basis standard untuk R^3, karena

(a) Sudah ditunjukkan pada Contoh 10 bahwa {**i**, **j**, **k**} bebas linier

(b) Sudah ditunjukkan pada Contoh 3 bahwa {**i**, **j**, **k**} membangun R^3

Secara umum, vektor-vektor satuan standard,

$$\mathbf{e_1} = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \text{dan}\ \mathbf{e_n} = (0, 0, 0, \ldots, 1),$$

adalah basis standard untuk R^n

Contoh 12: Perlihatkan bahwa $\mathbf{v_1}$ = (1, 2, 1), $\mathbf{v_2}$ = (2, 9, 0) dan $\mathbf{v_3}$ = (3, 3, 4) adalah basis untuk R^3.

Jawaban:

(a) Harus ditunjukkan bahwa $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, dan $\mathbf{v_3}$ bebas linier sbb:

$$k_1(1, 2, 1) + k_2(2, 9, 0) + k_3(3, 3, 4) = 0$$

Diperoleh SPL homogen:

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= 0 \\ k_1 \qquad + 4k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Harus ditunjukkan bahwa solusi SPL adalah trivial yaitu $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$

(b) Harus ditunjukkan bahwa $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, dan $\mathbf{v_3}$ membangun R^3 sbb:
Misalkan vektor sembarang $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ di R^3 dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v_3}$

$$(w_1, w_2, w_3) = k_1(1, 2, 1) + k_2(2, 9, 0) + k_3(3, 3, 4)$$

Diperoleh SPL:

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= w_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= w_2 \\ k_1 \qquad + 4k_3 &= w_3 \end{aligned}$$

Harus ditunjukkan bahwa SPL di atas dapat dipecahkan.

Untuk (a) dan (b) kita cukup menunjukkan bahwa matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

mempunyai balikan (*invers*), yaitu $\det(A) \neq 0$. Karena $\det(A) = -1$ (periksa!), maka matriks A tersebut dapat dibalikkan.

Oleh karena itu, SPL homogen:

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= 0 \\ k_1 \qquad\quad + 4k_3 &= 0 \end{aligned}$$

memiliki solusi trivial, dan SPL:

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= w_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= w_2 \\ k_1 \qquad\quad + 4k_3 &= w_3 \end{aligned}$$

dapat dipecahkan. Jadi, $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, dan $\mathbf{v_3}$ adalah basis untuk R^3.

- Contoh basis lainnya:

1. $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ adalah basis untuk ruang vektor polinom P_n

2. $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, dan $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah basis untuk ruang vektor matriks 2 x 2, yaitu M_{22}

Dimensi

- **Dimensi** ruang vektor V yang berhingga, dinyatakan dengan dim(V), adalah banyaknya vektor di dalam basis.

- Contoh:

(i) $\dim(R^2) = 2$, sebab basis standardnya memiliki 2 vektor (**i** dan **j**)

(ii) $\dim(R^3) = 3$, sebab basis standardnya memiliki 3 vektor (**i** , **j** dan **k**)

(iii) $\dim(R^n) = n$, sebab basis standardnya memiliki n vektor

(iv) $\dim(P_n) = n + 1$, sebab basis standardnya memiliki n + 1 vektor, yaitu

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

(v) $\dim(M_{mn}) = mn$, sebab basis standardnya memiliki mn vektor

Contoh 13: Tentukan basis dan dimensi dari ruang solusi SPL homogen berikut:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0\\
-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0\\
x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0\\
x_3 + x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}$$

<u>Jawaban</u>: Bila SPL tersebut diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss, maka dihasilkan solusinya sebagai berikut:

$x_1 = -s - t$; $x_2 = s$, $x_3 = -t$; $x_4 = 0$, $x_5 = t$

Solusi SPL dalam bentuk vektor (matriks kolom):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, solusi SPL dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{x} = s\mathbf{v_1} + t\mathbf{v_2}$$

yang dalam hal ini, $\mathbf{v_1}$ = (–1, 1, 0, 0, 0) dan $\mathbf{v_2}$ = (–1, 0, –1, 0, 1)

Solusi SPL tersebut membentuk ruang vektor V. Jadi, V dibangun oleh $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2}$.

Dapat ditunjukkan bahwa $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2}$ bebas linier (buktikan!).

Jadi basis ruang vektor solusi SPL adalah $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ dan dim(V) = 2.

Vektor Koordinat (relatif pada basis)

- Jika $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ adalah basis untuk ruang vektor V, sedemikian sehingga setiap vektor **v** di dalam V dapat dinyatakan sebagai

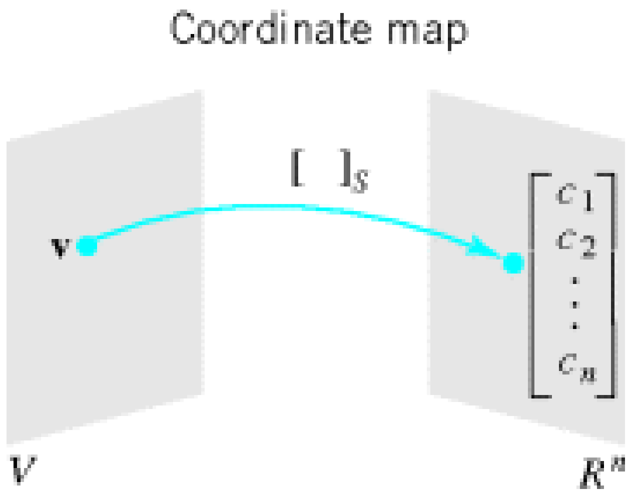
$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \ldots. + c_n\mathbf{v_n}$$

maka koordinat **v** relatif terhadap basis S adalah

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \ldots. c_n)$$

atau dalam bentuk matriks koordinat:

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$



Contoh 14: Sudah dibuktikan pada Contoh 12 bahwa $\mathbf{v_1} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v_2} = (2, 9, 0)$ dan $\mathbf{v_3} = (3, 3, 4)$ adalah basis untuk R^3.

(a) Tentukan vektor koordinat $\mathbf{v} = (5, -1, 9)$ relatif terhadapa basis $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$

(b) Carilah vektor di R^3 yang koordinat vektornya adalah $(\mathbf{v})_S = (-1, 3, 2)$

<u>Jawaban</u>:

(a) $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3}$

$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$

Diperoleh SPL:

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= -1 \\ c_1 \qquad + 4c_3 &= 9 \end{aligned}$$

Solusi SPL tersebut adalah $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$, maka $(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$

(b) $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \ldots. + c_n\mathbf{v_n} = (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) = (11, 31, 7)$

Mengubah Basis

- Jika **v** adalah vektor di dalam V dan kita mengubah basis V dari basis B menjadi basis B', bagaimana mengubah koordinat vektor $[\mathbf{v}]_B$ menjadi $[\mathbf{v}]_{B'}$?

- Jika kita mengubah basis ruang vektor V dari basis lama B = $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ menjadi basis baru B' = $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$, maka untuk setiap vektor **v** di dalam V, koordinat lama vektor $[\mathbf{v}]_B$ menjadi $[\mathbf{v}]_{B'}$ dihubungkan dengan relasi berikut:

$$[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'}$$

yang dalam hal ini, kolom-kolom *P* adalah koordinat vektor basis baru relatif terhadap basis lama, yakni kolom-kolom *P* adalah

$$[\mathbf{u}'_1]_B\ ,\ [\mathbf{u}'_2]_B\ ,\ \ldots,\ [\mathbf{u}'_n]_B$$

- P disebut **matriks transisi** dari basis B' ke basis B.
- Jika *P* adalah matriks transisi dari basis B' ke basis B untuk ruang vektor V, maka matriks P dapat dibalikkan dan P^{-1} adalah mariks transisi dari B ke B'.

- **Algoritma menghitung $P_{B \to B'}$:**

  Step 1: Bentuklah matriks [B' | B]

  Step 2: Lakukan operasi baris elementer (OBE) untuk mereduksi matriks dari step 1 menjadi matriks eselon baris tereduksi.

  Step 3: Matriks hasil step 2 akan menjadi [I | $P_{B \to B'}$]

  Step 4: Ruas kanan dari hasil step 3 (sebelah tanda |) menjadi $P_{B \to B'}$

- Algoritma di atas dapat diringkas ke dalam diagram:

$$[\text{ basis baru} \mid \text{basis lama}] \xrightarrow{\text{OBE}} [\, I \mid P_{B \to B'} \,]$$

Contoh 15: Di dalam R^2, basis standardnya adalah B = {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$} = {**i**, **j**} = {(1,0), (0, 1)}. Basis yang lain untuk R^2 adalah B'= {$\mathbf{u'}_1$, $\mathbf{u'}_2$} = {(1, 1), (2, 1)}

(a) Tentukan matriks transisi dari B' ke B

(b) Tentukan matriks transisi dari B ke B'

Jawaban:

(a) Pada kasus ini, B' = basis lama, dan B = basis baru

[basis baru | basis lama] = $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{OBE}}$ [I | $P_{B' \to B}$]

Karena ruas kiri sudah berbentuk matriks identitas, maka tidak perlu dilakukan OBE, sehingga matriks transisi adalah $P_{B' \to B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Pada kasus ini, B = basis lama, dan B' = basis baru

[basis baru | basis lama] = $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

Matriks transisi adalah $P_{B \to B'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- Menghitung koordinat vektor **v** dari basis B ke B':

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P_{B \to B'} [\mathbf{v}]_B$$

- Menghitung koordinat vektor **v** dari basis B' ke B:

$$[\mathbf{v}]_B = P_{B' \to B} [\mathbf{v}]_{B'}$$

Contoh 16: Berdasarkan Contoh 15, misalkan koordinat vektor **v** pada basis B' adalah $[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, maka koordinat **v** pada basis B adalah

$$[\mathbf{v}]_B = P_{B' \to B} [\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Contoh 17 (soal kuis 2 tahun 2019): Diketahui basis B = {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$} dan basis B' = {$\mathbf{u}'_1$, $\mathbf{u}'_2$, $\mathbf{u}'_3$} sebagai berikut: $\mathbf{u}_1$ = (2, 1, 1), $\mathbf{u}_2$ = (2, –1, 1), $\mathbf{u}_3$ = (1, 2, 1) dan $\mathbf{u}'_1$ = (3, 1, –5), $\mathbf{u}'_2$ = (1, 1, –3), $\mathbf{u}'_3$ = (–1, 0, 2).

(a) Tentukan matriks transisi dari B ke B'

(b) Tentukan matriks transisi dari basis standard ke B

(c) Tentukan matriks transisi dari basis standard ke B'

(d) Tentukan koordinat vektor **w** pada basis B, jika koordinat W pada basis standard (S) adalah $(\mathbf{w})_S$ = (–5, 8, –5).

<u>Jawaban</u>:

(a) Matriks transisi dari B ke B':

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & -3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right) = (I\,|\,P_{B\to B'})$$

Jadi, matriks transisi $P_{B\to B'} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5/2 \\ -2 & -3 & -1/2 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

(b) Matriks transisi dari basis standard ke basis B

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) = (I|P_{S\to B})$$

Jadi, matriks transisi $P_{S\to B} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) Matriks transisi dari basis standard ke basis B’

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{OBE}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = (I|P_{S\to B'})$$

Jadi, matriks transisi $P_{S\to B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

18

(d) Koordinat vektor **w** pada basis B, jika koordinat **w** pada basis standard adalah $[w]_S$ = (–5, 8, –5) dihitung sebagai beriku:

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Bersambung